CHARLOTTE
KLEIN COLLEGE OF SCIENCE
MATHEMATICS AND STATISTICS

REVIEW

of the PhD doctoral dissertation in Mathematics by Senior Lecturer of the Department of Computational Sciences and Statistics at Al-Farabi Kazakh National University (Kazakhstan, Almaty), **Zoya Izteleuovna Suleymenova**, on the topic:

"On the Asymptotic Behavior of Solutions and Averaging Issues of Certain Stochastic Parabolic Equations and Systems of Equations"

The dissertation submitted for defense consists of an Introduction, three chapters, a Conclusion, and a List of References.

In the Introduction, the relevance of the dissertation topic is substantiated, the goal of the research is formulated, and a brief annotation of the dissertation content by chapters is provided. The scientific novelty and the main points to be defended are also indicated.

The first chapter of the dissertation is devoted to proving certain versions of non-classical Central Limit Theorems (CLT) in probability theory.

As is well known, the condition of uniform asymptotic negligibility of the summands forms the basis of classical (i.e., those not relying on the condition of uniform infinitesimality of summands) CLTs in probability theory for sums of independent random variables. It is also widely recognized that in schemes involving the summation of independent terms, it is often more convenient to deal directly with the distributions themselves and to formulate the conditions of limit theorems based on distributional constraints. Since the distributions of random variables are uniquely determined by their characteristic functions, formulating the conditions of limit theorems in terms of characteristic functions is of great importance for summation theory. Usually, verifying these conditions for characteristic functions is a simpler task than verifying the same conditions for the distributions themselves.

On the other hand, it is also well known that if $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}, \dots$ is a sequence of independent random variables, $F_{nj}(x) = P(\xi_{nj} < x)$, $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots$, $F_n(x) = P(S_n < x)$, $\Phi(x)$ is the distribution function of the standard normal random variable, and $L(F_n, \Phi)$ is the Lévy distance between the distribution functions F_n and Φ, then the condition $L(F_n, \Phi) = 0$ is necessary and sufficient for the validity of the Central Limit Theorem.

In her dissertation, the applicant takes into account the well-known facts mentioned above and applies them to solve the problems posed by her academic supervisors. Thus, in Section 1.1 of Chapter I of the presented dissertation, several versions of non-classical limit theorems are proved, with the conditions formulated in terms of characteristic functions. Further, in Section 1.1 of the thesis, we find new Levy distances $L(F_n, \Phi)$, that are easy to verify and ensure convergence to zero, i.e., we find some necessary and sufficient conditions for the feasibility of the CLT.In the final part of Chapter I, another non-classical Central Limit Theorem is proved using a direct application of the definition of weak convergence of distributions, as well as a new version of the classical Lindeberg–Feller Central Limit Theorem.

The second chapter of the dissertation is devoted to probabilistic representations of the solution to the Cauchy problem for (stochastic) parabolic equations and to some of their applications (such as the study of probabilistic-asymptotic behavior of the solutions, averaging problems for parabolic equations, and related topics).

It is well known that the solution of the Cauchy problem for parabolic partial derivative equations is closely related to finding the conditional expectation and joint distribution of functionals from (related to the initial equation) random processes. But it is not always possible to find the required distributions of the required functionals by direct calculations, so one usually resorts to one or another method of finding the required characteristics. One of such methods is the so-called method of differential equations, which reduces the problem of finding joint distributions of various functionals from random processes to the solution (related to these functionals) of partial differential equations.

Thus, in Section 2.1 of the dissertation, it is shown that the conditional mathematical expectation $u(t,x) = M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s} \cdot e^{\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right]$, where $W_t, t \geq 0$ is a Wiener process, and M_x denotes the operation of taking the conditional expectation over all paths of W_t starting from point x at the initial moment, and where (t,x), $g(t,x)$ and $\Phi(x)$ are certain sufficiently smooth functions, can be found as the solution to the Cauchy problem for the following parabolic equation (for $t \geq 0, x \in R = (-\infty, +\infty)$):

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}g^2(t,x) + f(t,x)\right]u(t,x), u(0,x) = \Phi(x).$$

It is further shown that in the special case when $f(t,x) = f(x)$, $g(t,x) = g(x)$, by applying the Laplace transform, the solution of the equation can be reduced to the solution of an ordinary differential equation with constant coefficients. As an application, explicit forms of the distributions of certain specific functionals of the Wiener process are obtained, and their potential applications are discussed.

In Section 2.1 of Chapter II of the dissertation, the Cauchy problem for a parabolic equation perturbed by a "white noise"-type process is considered, and the asymptotic normality of the solution is proved in two ways: first, by representing the solution of the equation as a conditional mathematical expectation over the trajectories of an appropriate process, and second, by explicitly computing the stochastic differential associated with the stochastic integral having a variable upper limit. In Section 2.2 of Chapter II, the dissertation addresses the averaging problems for stochastic parabolic equations.

Chapter III of the dissertation is devoted to certain specific problems in the theory of magnetic fields in random media and occupies a special place; one can say that both in terms of content and obtained results, it is the central chapter of the entire dissertation.

While the process of magnetic field transport in a given fluid flow is fundamentally clear, the problem of describing turbulent fluid flow is, as is well known, extremely complex. Therefore, various methods of modeling fluid motion are typically employed. Previously, the evolution of the magnetic field was studied in different models of incompressible flow, in particular in the so-called linear renewal model, in which,

ultimately, the problem under consideration was reduced to the study of the product of independent random matrices as the number of factors increases.

In Section 3.1 of Chapter III of Z. Suleymenova's dissertation, the linear renewal model is generalized in the sense that the problem of the asymptotic behavior of the solution to the Cauchy problem for the magnetic field equation

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \upsilon_m \Delta\vec{H} - (\vec{V},\nabla)\vec{H} + (\vec{H},\nabla)\vec{V}, \quad \nabla\vec{H} = \nabla\vec{V} \equiv 0, \quad \vec{H}(0,x) = \overrightarrow{H_0}(x), \qquad (1)$$

is studied within a general Markovian linear model $\vec{V}(t,x) = C(b_t)x$: where b_t, $t \geq 0$ is a Brownian motion on a compact Riemannian manifold K of $dimK = \nu \geq 3$ with a metric form $ds^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} g_{ij}dx^i dx^j$, in local coordinates $x^1, \dots, x^\nu$ on K, and $d\sigma = \sqrt{det\ det\ g}\, dx$ is the Riemannian volume element. The infinitesimal operator of the process b_s, $s \geq 0$ is the Beltrami–Laplace operator $\frac{1}{2}\Delta$, where

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{det\ det\ g}} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g_{ij} \sqrt{det\ det\ g} \right) \right).$$

The matrix function $C(\cdot): K \to SL(\nu, R)$, where $SL(\nu, R)$ is the linear space of $\nu \times \nu$ matrices with zero trace, and the functions $g_{ij}(x), c_{ij}(x)$ belong to the class $C^\infty(K)$.

In the thesis it is proved that the solution of the magnetic induction equation $\vec{H}(t,x)$ in the Markov linear model can be written as an integral from some function depending on the multiplicative stochastic integral, i.e., from the solution of the system $\frac{d}{dt}G_t = C(b_t)G_t$, $G_0 = E$ (E is a unit matrix).

The main result of Section 3.1 of the dissertation is the proof of a Furstenberg-type theorem - a theorem establishing the almost sure existence of a strictly positive Lyapunov exponent for the multiplicative stochastic integral $G_t = \prod_{s=0}^{t} (E + C(b_s)ds)$: $\gamma = lim_{\ t\,\infty}[ln\|G_t\theta_0\|/t] > 0$ $(\boldsymbol{a.s.})$.

It should be noted that in the proof of this theorem the results of Hermander's theory of degenerate elliptic-parabolic differential operators were essentially used, and also the candidate had to prove a number of complicated (also of independent interest) auxiliary mathematical statements. The proved Furstenberg-type theorem for the multiplicative stochastic integral is, in a sense, a generalization of similar results for the product of unimodular random matrices, in particular, the product of independent or Markov sequence random matrices. In conclusion of Section 3.1, by means of the proved theorem of the Furstenberg type, the theorems on the exponential decrease of the magnetic field and the exponential growth of the total magnetic energy are proved.

Section 3.2 of Chapter III of the dissertation is devoted to the definition and study of the discrete model of the kinematic dynamo (i.e., the model does not take into account the inverse effect of the magnetic field on the velocity field and temperature) and to the proof of the phase transition in the discrete dynamo model by the parameter ρ (diffusion coefficient). Note that the inverse quantity 1/ρ has the sense of temperature, i.e., small ρ refers to "hot" systems, and large ρ to "cold" ones.

CHARLOTTE
KLEIN COLLEGE OF SCIENCE
MATHEMATICS AND STATISTICS

The important astrophysical problem on the generation of the magnetic field $\vec{H}(t,x)$ by a turbulent flow of electrically conducting plasma with a time and space homogeneous random velocity field $\vec{V}(t,x)$ $(t \geq 0,\ x \in R^3)$ is reduced to Maxwell's equations (1). It is assumed that the field $\vec{V}(t,x)$ has short time correlations (turbulence) and is invariant with respect to the orthogonal group O^3 of rotations of the three-dimensional phase space R^3.

The probabilistic representation of the field $\vec{H}(t,x)$ in terms of the stochastic differential equation for x(t) and the multiplicative potential matrix integral $\vec{V}(t,\cdot)$ along x(t) yields the equation for the second moment of the field $\vec{H}$: $m_2(t,x) =< (\vec{H}(t,x), \vec{H}(t,x)) >$, where the angle brackets <···> denote integration (averaging) over the velocity field distribution $\vec{V}(t,x)$.

In the isotropic δ - time correlated field $\vec{V}(t,x)$ equations for $m_2(t,x)$ admits a full asymptotic analysis and exhibits a phase transition in terms of the ν_m (magnetic viscosity) parameter:

There exists $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\left[ln < (\vec{H}(t,x), \vec{H}(t,x)) >\right] = \gamma_2(\nu_m) > 0;$ and there is a critical value ν_{cr} such that: $\gamma_2(\nu_m) > 0,\ \nu_m < \nu_{cr}\ ;\ \gamma_2(\nu_m) = 0,\ \nu_m \geq \nu_{cr}.$
Furthermore, problem (1) has also been studied in a discrete model.

Discrete model description. The phase space of the model consists of points $(t,x), t \in Z_+ = \{0,1,2,\dots\}, x \in Z^3$ and edges connecting the points (s,x) and $(s-1,x'), |x-x'| \leq 1$. A symmetric wander $\boldsymbol{x(t)}$ with increasing time and transition probabilities can be defined on this graph

$$P\left\{\frac{x(t+1) > x'}{x(t) = x}\right\} = \{1-\rho, x' = x\ \frac{\rho}{6}\ , |x-x'| = 1.$$

Lagrangian trajectories have the form $\xi(s) = x + x(t-s),\ s \geq 0,$ i.e. $\xi(t) = x,$ $\xi(t-1) = x + x(t), \dots$ (the direction of time is changed). The magnetic potential $A\big((s,y),(s-1,y)\big)$ is defined on the edges of the graph directed from the point (s,y) to the point $(s-1,y), |y-y'| \leq 1$. It is assumed that 3×3 matrices $A\big((s,y),(s-1,y')\big)$ are independent for different edges and have a special form $A[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})] = O_1 \Lambda O_2[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})]$, where orthogonal matrices O_1, O_2 are uniformly distributed on the group O^3 of rotations of the space R^3, independent among themselves and independent of the diagonal matrix $\Lambda = diag\{\left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})]\}$, $C_0 \geq a(\cdot) \geq 1$ are identically distributed random variables defined on the edges of the graph.

For each Lagrangian trajectory $\xi(\cdot)$ leading from the point (t,x) to the final point $(0,y)$ of the graph, the expression
$\vec{H}_\xi(t,x) = A[(t,x_0),(t-1,x_1)][(t-1,x_1),(t-2,x_2)] \cdot \cdots \cdot A[(1,x_{t-1}),(0,x_t = y)]\vec{H}_0(y)$
is defined.

Here $\xi = (x_0, x_1, \dots, y)$ is the Lagrangian trajectory, $\vec{H}_0(y, \omega)$ is the initial magnetic field. The probability of the trajectory $\xi(\cdot)$ is given by the formula $P(\xi) = (1-\rho)^{n_0}\left(\frac{\rho}{6}\right)^{n_1}$, where $n_0(\xi)$ =number$\{s: x_s = x_{s-1}\}$, $n_1(\xi)$ =number$\{s: |x_s = x_{s-1}| = 1\}$. Finally, for the total magnetic field of the introduced model, the expression is obtained

$$\vec{H}(t,x) = \sum_{y \in Z^3} \sum_{\xi:(t,x)\to(0,y)} P(\xi)\vec{H}_\xi(t,x).$$

The final formula can be interpreted as a Kac-Feynman representation of the magnetic field $\vec{H}(t,x)$, which is defined by a (difference) parabolic equation

$$\vec{H}(t,x) = (1-\rho)A\big((t,x),(t-1,x)\big)\vec{H}(t-1,x) +$$

$$+ \sum_{x':|x-x'|=1} A\big((t,x),(t-1,x')\big)\vec{H}(t-1,x').$$

Using the representation of the magnetic field $\vec{H}(t,x)$, Lyapunov exponents were studied: the moment Lyapunov exponents

$$\gamma_{2p} = ln\langle\left(\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)\right)^p\rangle/t], \quad p = 1,2,\dots,$$

and the sample (empirical) exponent $\tilde{\gamma} = \lim_{t\to\infty} 2^{-1}\left[ln < (\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)) > /t\right]$.

It is emphasized that, unlike the scalar case where $\gamma_{2p} \geq 0$ and $\tilde{\gamma} \geq 0$ due to the maximum principle, in this setting the exponents can be negative. Several preliminary results are used, and the main result - a Furstenberg-type theorem is proven.

Theorem. Let $A_1, \dots, A_n, \dots$ are the independent identically distributed matrices introduced above, and let $\overrightarrow{e_0}$ is a unit vector. Then (a.s):

$$\tilde{\gamma} = \frac{ln|A_1 \cdot \dots \cdot A_n\overrightarrow{e_0}|}{n} = \langle\frac{1}{2}ln\left(a^2\lambda^2 + \frac{1-\lambda^2}{a}\right)\rangle > 0.$$

Here $\lambda \sim unif([-1,1])$, and a is the previously introduced random variable, independent of λ.

The computation of higher-order moment Lyapunov exponents is reduced to solving multiple Schrödinger-type partial differential equations on Z^p, $p \geq 1$.

In summary, the dissertation represents a completed work, the content of which fully reflects the topic of the research. The problems addressed in the dissertation are novel and relevant. Throughout the course of the research, the doctoral candidate demonstrated a high level of proficiency in mathematical methods, showed scientific independence, and approached each stage of the work with responsibility, perseverance, and academic discipline. The statements formulated in the dissertation are mathematically rigorous and thoroughly proven.

Thus, in terms of the relevance of the problem, the level of execution, scientific novelty, and practical significance of the research results, the presented dissertation fully

CHARLOTTE
KLEIN COLLEGE OF SCIENCE
MATHEMATICS AND STATISTICS

meets the requirements for a scientific and qualification work at the PhD level. It contains substantial scientific results that are original and of practical importance. Its author, Zoya Suleimenova, fully deserves to be awarded the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Mathematics.

Stanislav Molchanov, Ph.D., Doctor of Sciences
Professor, Department of Mathematics and Statistics
Fellow of AMS
Foreign Adviser of Z. Suleimenova

July 21, 2025

S. Molchanov

Шарлотта
Клайн ғылым, математика және статистика колледжі

Пікір

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің (Қазақстан Республикасы, Алматы қ.) Есептеу ғылымдары және статистика кафедрасының аға оқытушысы **Сүлейменова Зоя Изтелеуовна** *«Кейбір кездейсоқ параболалық теңдеулер мен теңдеулер жүйелері шешімдерінің асимптотикалық беталыстары және оларды орталандыру сұрақтары туралы»* тақырыбындағы Математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған докторлық диссертациясына

ПІКІР

Қорғауға ұсынылған диссертация **Кіріспеден**, үш **тараудан**, **Қорытындыдан** және **Пайдаланылған әдебиеттер тізімінен** тұрады.

Кіріспеде диссертация тақырыбының өзектілігі негізделген, жұмыстың мақсаты тұжырымдалған, тараулар бойынша диссертациялық жұмыстың мазмұнына қысқаша аннотация берілген. Сондай-ақ ғылыми жаңалығы мен қорғауға ұсынылатын тұжырымдар көрсетілген.

Диссертацияның *бірінші тарауы* ықтималдықтар теориясының орталық шектік теоремаларының (ОШТ) кейбір классикалық емес нұсқаларын дәлелдеуге арналған.

Қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздық шарты тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындылары үшін ықтималдықтар теориясының классикалық (яғни, қосылғыштардың бірқалыпты шексіз аздық шартын пайдаланатын) ОШТ-ның негізі болып табылатыны белгілі. Сонымен бірге, тәуелсіз қосылғыштарды қосу схемаларында көбіне тікелей олардың үлестірімдерімен жұмыс істеген және шектік теоремалардың шарттарын осы үлестірімдерге тікелей сүйенетін шектеулер түрінде тұжырымдаған ыңғайлы болады. Кездейсоқ шамалардың үлестірімдері оларға сәйкес сипаттамалық функциялар арқылы бірмәнді анықталатындықтан, қосу теориясы үшін шектік теоремалардың шарттарын сипаттамалық функциялар терминдерінде тұжырымдау өте маңызды: әдетте бұл шарттарды сипаттамалық функциялар үшін тексеру сол шарттарды тікелей үлестірімдер үшін тексергеннен гөрі анағұрлым оңай болады.

Сондай-ақ екінші жағынан мына жайт та жақсы белгілі: егер ξ_{n1}, $\xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}, \dots$- тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі болса, $F_{nj}(x) = P(\xi_{nj} < x)$, $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots$, $F_n(x) = P(S_n < x)$, $\Phi(x)$ – стандартты нормал кездейсоқ шаманың үлестірім функциясы, ал $L(F_n, \Phi)$ – F_n және Φ үлестірім функцияларының арасындағы Леви қашықтығы (метрикасы) болса, онда $\lim_{n\to\infty} L(F_n, \Phi) = 0$ шарты ОШТ-ның орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарт болып табылады.

Ізденуші өзінің диссертациялық жұмысында жоғарыда айтылған белгілі фактілерді ескере отырып, оларды ғылыми жетекшілері қойған есептерді шешуге қолданған. Мәселен, ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстың I тарауының 1.1-бөлімінде сипаттамалық функциялар терминдерінде тұжырымдалған шарттар аясында бірқатар классикалық емес шектік теоремалар дәлелденген. Ары қарай, диссертацияның 1.1-бөлімінде Леви қашықтығы $L(F_n, \Phi)$ - тің нөлге жинақталуын қамтамасыз ететін және тексеруге оңай жаңа шарттары табылған, яғни ОШТ-ның орындалуы үшін кейбір қажетті және жеткілікті шарттар алынған. I тараудың соңғы бөлімінде үлестірімдердің әлсіз жинақталуының анықтамасын тікелей қолдану арқылы тағы бір классикалық емес ОШТ және Линдеберг–Феллердің классикалық шектік теоремасының жаңа бір нұсқасы дәлелденген.

Диссертацияның *екінші тарауы* (кездейсоқ) параболалық теңдеулер үшін Коши есебінің шешімдерінің ықтималдықтық жазылымдарына және олардың кейбір қолданылуларына (шешімнің ықтималдықтық – асимптотикалық беталысын зерттеу, параболалық теңдеулерді орталандыру сұрақтарына және т.б.) арналған.

Дербес туындылы параболалық теңдеулер үшін Коши есебінің шешуі (бастапқы теңдеумен байланысты) кездейсоқ процестердің функционалдарынан шартты математикалық күтімдері мен бірлескен үлестірімдерін табу сұрақтарымен тығыз байланысты екені жақсы белгілі. Бірақ та керекті функционалдардың қажетті үлестірімдерін тікелей табу әрқашан мүмкін бола бермейді, сондықтан әдетте бұл қажетті сипаттамаларды табудың әртүрлі тәсілдері қолданылады. Осындай әдістердің бірі, ол - *дифференциалдық теңдеулер әдісі* деп аталатын әдіс: бұл әдіс кездейсоқ процестердің әртүрлі функционалдарының бірлескен үлестірімдерін табу есебін (осы функционалдармен байланысты) дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешу мәселесіне келтіреді.

Осылайша, диссертацияның 2.1-бөлімінде

$$u(t,x) = M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s} \cdot e^{\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right],$$

шартты математикалық күтімі, мұндағы $W_t, t \geq 0$ - Винер процесі, M_x – Винер процесінің бастапқы $t = 0$ уақыт сәтінде x нүктесінен шығатын барлық траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтім, $f(t,x)$, $g(t,x)$ және $\Phi(x)$ - қандай да бір жеткілікті тегіс функциялар, келесі параболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімі ретінде табуға болатыны дәлелденген ($t \geq 0, x \in R = (-\infty, +\infty)$):

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}g^2(t,x) + f(t,x)\right]u(t,x),$$

$$u(0,x) = \Phi(x).$$

Ары қарай, $f(t,x)=f(x)$, $g(t,x)=g(x)$ болатын жеке жағдайларда, Лаплас түрлендіруіне көшу арқылы алынған теңдеуді шешуді коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеуді шешуге келтіруге болатыны көрсетілген. Алынған нәтиженің қолданылуы ретінде Винер процесінің кейбір нақты функционалдарының үлестірімдерінің айқын түрлері табылып, олардың қолданылу мүмкіндіктері талқыланған.

Диссертацияның II тарауының 2.1-бөлімінде «ақ шу» типті процесс арқылы ұйытқытылған параболалық теңдеу үшін Коши есебі қарастырылып, теңдеудің шешімнің асимптотикалық нормалдығы екі тәсілмен дәлелденген: теңдеудің шешімін тиісті процестің траекториялары бойынша алынған шартты математикалық күтім түріндегі жазылымын пайдалану арқылы және теңдеумен байланысты анықталған жоғарғы шегі айнымалы стохастикалық интегралдың стохастикалық дифференциалын тікелей есептеу арқылы. II тараудың 2.2-бөлімінде кездейсоқ параболалық теңдеулерді орталандырудың кейбір сұрақтары қарастырылған.

Диссертацияның III тарауы кездейсоқ орталардағы магнит өрістері теориясының кейбір нақты мәселелеріне арналған және, айта кету керек, мазмұны мен алынған нәтижелері бойынша диссертацияның негізгі (орталық) бөлімі деп айтуға болады.

Сұйықтықтың берілген ағынындағы магнит өрісінің тасымалдану процесі принципті түрде түсінікті болғанымен, турбулентті сұйықтық ағынды сипаттау мәселесі аса күрделі болатыны белгілі. Сондықтан әдетте сұйықтың қозғалысын модельдеудің әртүрлі әдістеріне жүгінеді. Бұған дейін магнит өрісінің эволюциясы сығылмайтын ағынның әртүрлі модельдерінде, соның ішінде жаңаланатын сызықтық модель деп аталатын , ақыр аяғында зерттеліп отырған есеп көбейткіштер саны шексіз көбейе берген уақытта тәуелсіз кездейсоқ матрицалардың көбейтіндісін зерттеу есебіне келтірілетін, моделі үшін зерттелінген.

З. Сүлейменованың диссертациялық жұмысының III тарауының 3.1-бөлімінде жаңаланатын сызықтық модель мына мағынада жалпыландырылған: магнит өрісінің

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}=\upsilon_m\Delta\vec{H}-(\vec{V},\nabla)\vec{H}+(\vec{H},\nabla)\vec{V},\quad \nabla\vec{H}=\nabla\vec{V}\equiv 0,\quad \vec{H}(0,x)=\overrightarrow{H_0}(x),\qquad (1)$$

теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің асимптотикалық беталысы $\vec{V}(t,x)=C(b_t)x$ жалпы марковтық сызықтық моделінде, мұндағы b_t, $t\geq 0$, компактты K, $dimK=\nu\geq 3$, римандық көпбейнесіндегі $x^1,\dots,x^\nu$ локалдық координаттарда метрикалық формасы $ds^2=\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}g_{ij}dx^idx^j$ көлемінің римандық элементі $d\sigma=\sqrt{\det g}\,dx$ болатын броундық қозғалыс, зерттелінген. b_s, $s\geq 0$, процесінің инфинитезималды операторы $\frac{1}{2}\Delta$ – Бельтрами–Лаплас операторы, болады, мұндағы

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ij}\sqrt{\det g}\right)\right).$$

Матрица $C(\cdot): K \to SL(v,R)$, мұндағы $SL(v,R)$– іздері нөлге тең болатын $v \times v$ өлшемді квадрат матрицалардың сызықтық кеңістігі, ал $g_{ij}(x), c_{ij}(x)$ функциялары $C^{\infty}(K)$ класының функциялары.

Диссертацияда магниттік индукция теңдеуі $\vec{H}(t,x)$- тың марковтық сызықтық модельдегі шешімін мультипликативтік стохастикалық интегралға, яғни $\frac{d}{dt}G_t = C(b_t)G_t$, $G_0 = E$ (бірлік матрица) жүйесінің шешіміне, тәуелді қандай да бір айқын функцияның интегралы ретінде жазуға болатындығы дәлелденген .

Диссертацияның 3.1- бөлімінің негізгі нәтижесі -Ферстенберг типтес теореманың, яғни

$$G_t = \prod_{s=0}^{t}(E + C(b_s)ds)$$

стохастикалық мультипликативтік интегралы үшін

$$\gamma = \lim_{t\to\infty}[ln\|G_t\theta_0\|/t] > 0 \text{ (а.д.)}.$$

қатаң оң Ляпунов көрсеткішінің (а.д.) бар болатынын дәлелдеуі болып табылады.

Осы теореманы дәлелдеу барысында Хермандердің өзгешеленген эллиптикалық–параболалық дифференциалдық операторлар теориясының нәтижелері маңызды түрде пайдаланылғанын айта кету керек, сондай-ақ ізденушіге жолай бірқатар көмекші (өз алдына да жеке ғылыми қызығушылықтар тудыратын) күрделі математикалық тұжырымдарды дәлелдеуге тура келген. Мультипликативтік стохастикалық интеграл үшін дәлелденген Ферстенберг типтес теорема белгілі бір мағынада унимодулярлы кездейсоқ матрицалардың көбейтінділері үшін алынған ұқсас, жеке жағдайларда, мәселен тәуелсіз немесе марков тізбесін құрайтын кездейсоқ матрицалардың көбейтінділері үшін, алынған белгілі нәтижелердің жалпыландырылуы болып табылады. 3.1-бөлімнің қорытындысында, дәлелденген Ферстенберг типтес теореманы қолдана отырып, магнит өрісінің экспоненциалды кемуі және толық магнит энергиясының экспоненциалды өсуі туралы теоремалар дәлелденген.

Диссертацияның III тарауының 3.2- бөлімі кинематикалық динамоның (яғни, қарастырылып отырған модельде магнит өрісінің жылдамдық өрісіне және температураға кері әсері ескерілмейтін) дискретті моделін анықтауға және зерттеуге, сондай-ақ ρ параметрі (диффузиялық коэффициент) бойынша дискретті динамо моделінде фазалық көшудің бар екенін дәлелдеуге арналған. Айта кетелік, ρ ға кері $1/\rho$ шамасы мағынасы бойынша температураны білдіреді, яғни ρ-ның кіші мәндері «ыстық» жүйелерге, ал үлкен мәндері «суық» жүйелерге сәйкес келеді.

$\vec{H}(t,x)$ магнит өрісінің уақыт пен кеңістік бойынша біртекті кездейсоқ жылдамдық өрісі $\vec{V}(t,x)$ $(t \geq 0,\ x \in R^3)$ бар электр өткізгіш плазманың

турбулентті ағынымен генерациялануы жөніндегі маңызды астрофизикалық мәселе Максвелл теңдеулеріне (1) келтіріледі. Жылдамдық өрісі $\vec{V}(t,x)$ қысқа уақыттық корреляцияларға ие (турбуленттік) ие және үш өлшемді фазалық кеңістік R^3-ті айналдырудың O^3 ортогоналдық группасына байланысты инвариантты деп ұйғарылады.

$\vec{H}(t,x)$ өрісінің $x(t)$ үшін стохастикалық дифференциалдық теңдеу терминінде және $\vec{V}(t,\cdot)$ потенциалының $x(t)$ бойымен мультипликативті матрицалық интегралы арқылы жазылымы $\vec{H}$ өрісінің екінші моменті: $m_2(t,x) =< (\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)) >$, мұндағы бұрыштық жақшалар $<\cdots>$ – жылдамдық өрісі $\vec{V}(t,x)$- тің үлестірімі бойынша интегралдауды (орталандыруды) білдіреді, үшін теңдеу алуға мүмкіндік береді.

Изотропты және уақыт бойынша δ – корреляцияланған $\vec{V}(t,x)$ өрісінде $m_2(t,x)$ үшін теңдеулер толық асимптотикалық талдау жасауға мүмкіндік береді және ν_m (магниттік тұтқырлық) параметрі бойынша фазалық көшуді көрсетеді:

$$\lim_{t\to\infty} 2^{-1}\left[ln < (\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)) >\right] = \gamma_2(\nu_m) \geq 0$$

шегі бар болатыны дәлелденген;

$\gamma_2(\nu_m) > 0,\ \nu_m < \nu_{cr}\ ;\ \gamma_2(\nu_m) = 0,\ \nu_m \geq \nu_{cr};$ болатын ν_{cr} критикалық мәні табылады.

Ары қарай, (1) есебі дискретті модельде зерттелінген.

Дискретті модельдің сипаттамасы. Модельдің фазалық кеңістігі $(t,x), t \in Z_+ = \{0,1,2,\dots\}, x \in Z^3$ нүктелерінен және (s,x) пен $(s-1,x'), |x - x'| \leq 1$ нүктелерін қосатын қабырғалардан тұрады. Осы графта уақыты өспелі және өту ықтималдықтары былайша

$$P\{x(t+1) > x'/x(t) = x\} = \begin{cases} 1-\rho, & x' = x \\ \dfrac{\rho}{6}, & |x - x'| = 1. \end{cases}$$

анықталатын $x(t)$-ң симметриялы кезуін анықтауға болады.

Лагранждық траекториялар келесі түрде беріледі: $\xi(s) = x + x(t-s)$, $s \geq 0$, яғни $\xi(t) = x,\ \xi(t-1) = x + x(t), \dots$ (уақыт бағыты өзгертілген). $A\big((s,y),(s-1,y)\big)$ магниттік потенциалы графтың (s,y) нүктесінен $(s-1,y)$ $|y - y'| \leq 1,$ бағытталған қырларында анықталған. 3×3 өлшемді $A\big((s,y),(s-1,y')\big)$ матрицалары әртүрлі қырлар үшін тәуелсіз және арнайы $A[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})] = O_1 \Lambda O_2[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})]$ түрінде берілген деп ұйғарылады, мұндағы ортогонал O_1, O_2 матрицалары R^3 кеңістігінің O^3 ортогоналды айналдыру группасында бірқалыпты үлестірілген, өзара тәуелсіз және $\Lambda = diag\{\left(a,\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)[(s,y_s),(s-1,y_{s-1})]\}$ диагоналды матрицасынан тәуелсіз, $C_0 \geq a(\cdot) \geq 1$ граф қырларында анықталған бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар.

Графтың (t,x) нүктесінен ең соңғы $(0,y)$ нүктесіне жеткізетін әрбір лагранждық траектория $\xi(\cdot)$, үшін келесі өрнек анықталған:

$$\vec{H}_\xi(t,x) = A[(t,x_0),(t-1,x_1)][(t-1,x_1),(t-2,x_2)]\cdot\cdots$$

$$\cdot A[(1, x_{t-1}), (0, x_t = y)]\vec{H}_0(y).$$

Мұнда $\xi = (x_0, x_1, \dots, y)$ – Лагранж траекториясы, $\vec{H}_0(y, \omega)$ - бастапқы магнит өрісі. $\xi(\cdot)$ траекториясының ықтималдығы мына формула арқылы беріледі:

$P(\xi) = (1-\rho)^{n_0}\left(\frac{\rho}{6}\right)^{n_1}$, мұнда $n_0(\xi) =$ саны$\{s: x_s = x_{s-1}\}$, $n_1(\xi) =$ саны$\{s: |x_s = x_{s-1}| = 1\}$.

Ең соңында, енгізілген модельдің толық магнит өрісі үшін

$$\vec{H}(t,x) = \sum_{y\in Z^3}\sum_{\xi:(t,x)\to(0,y)} P(\xi)\vec{H}_\xi(t,x)$$

өрнегі алынған.

Соңғы формуланы $\vec{H}(t,x)$ магнит өрісінің

$$\vec{H}(t,x) = (1-\rho)A\big((t,x),(t-1,x)\big)\vec{H}(t-1,x) +$$
$$+\left(\frac{\rho}{6}\right)\sum_{x':|x'-x|=1} A\big((t,x),(t-1,x')\big)\vec{H}(t-1,x')$$

(айырымдық) параболалық теңдеу арқылы берілген Кац– Фейнман түріндегі жазылымы деп түсінуге болады.

$\vec{H}(t,x)$ өрісінің берілген жазылымын пайдалана отырып, Ляпунов көрсеткіштері зерттелді:

моменттік көрсеткіштер $\gamma_{2p} = (2p)^{-1}\lim_{t\to\infty}[ln\langle\left(\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)\right)^p\rangle/t]$, $p = 1,2,\dots$,

таңдамалық көрсеткіш $\tilde{\gamma} = \lim_{t\to\infty} 2^{-1}\left[ln < (\vec{H}(t,x),\vec{H}(t,x)) > /t\right]$.

$\gamma_{2p} \geq 0$, $\tilde{\gamma} \geq 0$ болатын скалярлы жағдайдағыдай емес, бұл жағдайда, максимум принципінің әсері бойынша, көрсеткіштер теріс мән қабылдауы да мүмкін болатындығы атап өтілген.

Бірнеше алдын ала нәтижелерді пайдалана отырып, негізгі нәтиже – Ферстенберг типтес теорема дәлелденді.

Теорема. Айталық, $A_1, \dots, A_n, \dots$ - жоғарыда енгізілген тәуелсіз бірдей үлестірілген матрицалар, $\overrightarrow{e_0}$ бірлік вектор болсын. Онда

$$\tilde{\gamma} = \lim_{n\to\infty}\frac{ln|A_1\cdot\dots\cdot A_n\overrightarrow{e_0}\,|}{n} = \langle\frac{1}{2}ln\left(a^2\lambda^2 + \frac{1-\lambda^2}{a}\right)\rangle > 0.$$

Мұнда $\lambda \sim unif([-1,1])$, a – жоғарыда енгізілген λ –дан тәуелсіз кездейсоқ шама.

Ляпуновтың жоғарғы ретті моменттік көрсеткіштерін есептеу болған жағдайда Z^p, $p \geq 1$, дегі көп бөлшекті Шредингер теңдеулерін шешуге келтірілген.

Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе, диссертациялық жұмыс толық аяқталған еңбек болып табылады, оның мазмұны диссертация тақырыбын толық көлемде қамтыған деп айта аламын. Диссертациялық жұмыста қарастырылған есептер жаңа және өзекті есептер. Диссертациялық жұмысты орындау барысында докторант математикалық аппаратты жоғары

деңгейде меңгергенін көрсетті, ғылыми дербестік танытты, зерттеудің әр кезеңіне жауапкершілікпен қарап, табандылық пен ғылыми тәртіп көрсетті. Диссертацияда тұжырымдалған нәтижелер математикалық тұрғыдан қатаң дәлелденген.

Осылайша, қойылған мәселенің өзектілігі, орындалу деңгейі, ғылыми жаңалығы және зерттеу нәтижелерінің практикалық маңыздылығы бойынша ұсынылған диссертациялық жұмыс PhD деңгейіндегі ғылыми-біліктілік зерттеулеріне қойылатын барлық талаптарға сай келеді, өзіне тән түпнұсқалығы және қолданбалы маңыздылығы бар елеулі ғылыми нәтижелерді қамтиды, ал оның авторы – Сүлейменова Зоя Изтелеуовна математика мамандығы бойынша философия докторы (PhD) ғылыми дәрежесін беруге әбден лайық.

3. Сулейменованың Шетелдік ғылыми кеңесшісі
Шарлоттадағы Солтүстік Каролина
университетінің (АҚШ)
математика және статистика
кафедрасының профессоры, доктор
AMS құрметті мүшесі

Станислав Молчанов ***/қолы/***

21-шілде 2025